

実力テスト
発展

4章 関数 $y=ax^2$

①関数 $y=ax^2$ とそのグラフ



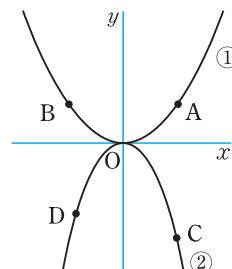
得点

点

- 1 右の図のように、2つの関数 $y=\frac{1}{2}x^2 \cdots \textcircled{1}$, $y=-x^2 \cdots \textcircled{2}$ のグラフがあります。

①のグラフ上に点Aがあり、点Aのx座標を t とします。点Aとy軸について対称な点をBとし、点Aとx座標が等しい②のグラフ上の点をCとします。また、②のグラフ上に点Dがあり、点Dのx座標を負の数とします。点Oは原点とします。ただし、 $t>0$ とします。

〈北海道〉 【16点×3=48点】



- (1) 四角形ABDCが長方形となるときの、点Dの座標を、 t を使って表しなさい。

考え方 点Aとy軸について対称な点がBだから、点Bのx座標は $-t$

四角形ABDCが長方形になるときの、点Dと点Bのx座標は等しい。

$$D(-t, -t^2)$$

- (2) $t=4$ とします。点Cを通り、傾きが -3 の直線の式を求めなさい。

考え方 $t=4$ のとき、点Cの座標は $(4, -16)$ だから、

求める式を $y=-3x+b$ として、 $x=4, y=-16$ を代入する。

$$y=-3x-4$$

- (3) 2点B, Cを通る直線の傾きが -2 となるときの、点Aの座標を求めなさい。

考え方 $B(-t, \frac{1}{2}t^2)$, $C(t, -t^2)$ より2点B, Cを通る直線の傾きは

$$\frac{-t^2 - \frac{1}{2}t^2}{t+t} = -2 \quad t>0 \text{ より } t=\frac{8}{3}$$

$$A\left(\frac{8}{3}, \frac{32}{9}\right)$$

- 2 放物線 $y=x^2$ の上に2点A, Bがあり、放物線 $y=ax^2$ の上に2点C, Dがあり、四角形ABCDは座標軸に平行な辺をもつ長方形になっています。

〈桃山学院高〉 【(1) 16点, (2)(3) 18点×2=36点】

- (1) 点Aのx座標が2のとき、点Cのy座標が1でした。 a の値を求めなさい。

考え方 点Aのx座標が2のとき、点Cのx座標は -2 だから、

$y=ax^2$ に $x=-2, y=1$ を代入すると、

$$1=a \times (-2)^2 \text{ より } a=\frac{1}{4}$$

$$a=\frac{1}{4}$$

以下では、 a は(1)で求めた値とします。

- (2) 四角形ABCDが正方形になるときの、点Dのx座標を求めなさい。

考え方 $D(d, \frac{1}{4}d^2)$ ($d>0$) とすると、 $A(d, d^2)$, $B(-d, d^2)$ $AB=d-(-d)=2d$, $AD=d^2-\frac{1}{4}d^2=\frac{3}{4}d^2$

四角形ABCDが正方形になるから、 $2d=\frac{3}{4}d^2$

$$\frac{8}{3}$$

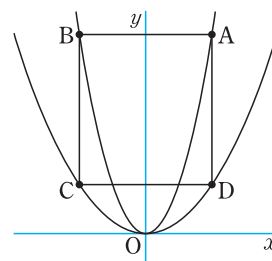
- (3) 対角線ACとy軸との交点が $(0, 10)$ のとき、四角形ABCDの面積を求めなさい。

考え方 $A(e, e^2)$ ($e>0$) とすると、 $C(-e, \frac{1}{4}e^2)$

$$AC \text{ の中点の } y \text{ 座標が } 10 \text{ だから, } \frac{1}{2}\left(e^2 + \frac{1}{4}e^2\right) = 10 \quad \frac{5}{4}e^2 = 20 \quad e^2 = 16$$

$$e>0 \text{ より } e=4 \quad \text{四角形ABCDの面積は } \{4-(-4)\} \times \left(4^2 - \frac{4^2}{4}\right) = 96$$

$$96$$



実力テスト
発展

4章 関数 $y=ax^2$

②関数 $y=ax^2$ の値の変化



得点

点

1 次の問いに答えなさい。

【20点×2=40点】

- (1) 関数 $y=ax^2$ について、 x の変域が $-4 \leq x \leq 6$ のとき、 y の変域が $-27 \leq y \leq b$ となるような定数 a 、 b の値を求めなさい。

〈三田学園高〉

考え方 $y=ax^2$ について、

$x=0$ のとき $y=0$ だから、 $b=0$

$x=6$ のとき $y=-27$ だから、 $36a=-27$ $a=-\frac{3}{4}$

a $-\frac{3}{4}$ b 0

- (2) 2つの関数 $y=-2x^2$ と $y=mx+5$ について、 $x=-3$ から $x=-1$ まで増加するときの変化の割合が等しいとき、 m の値を求めなさい。

〈常翔学園高〉

考え方 $x=-3$ から $x=-1$ まで増加するとき、 $y=-2x^2$ の変化の割合は $\frac{-2-(-18)}{-1-(-3)}=8$

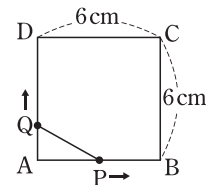
$y=mx+5$ の変化の割合は一定で m

よって、 $m=8$

$m=8$

- 2 右の図のような1辺が6cmの正方形ABCDがあります。点P、Qは、点Aを同時に出発して、点Pは毎秒2cmの速さで正方形の辺上を反時計回りに動き、点Qは毎秒1cmの速さで正方形の辺上を時計回りに動きます。また、点P、Qは出会うまで動き、出会ったところで停止します。点P、Qが点Aを出発してから x 秒後の $\triangle APQ$ の面積を y cm²とすると、次の問いに答えなさい。ただし、 $x=0$ のときと、点P、Qが出会ったときは、 $y=0$ とします。

〈愛媛〉 【12点×5=60点】



- (1) $x=1$ のときと、 $x=4$ のときの、 y の値をそれぞれ求めなさい。

考え方 $x=1$ のとき、 $y=\frac{1}{2} \times 1 \times 2=1$ $x=4$ のとき、PはBC上にあるので、 $y=\frac{1}{2} \times 4 \times 6=12$

$x=1$ のとき $y=1$ $x=4$ のとき $y=12$

- (2) 点P、Qが出会うのは、点P、Qが点Aを出発してから何秒後か求めなさい。

考え方 点P、Qが t 秒後に出会うとすると、 $2t+t=6 \times 4$ $t=8$

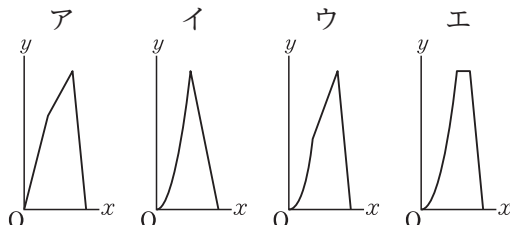
8秒後

- (3) 下のア～エのうち、 x と y の関係を表すグラフとして、最も適当なものを1つ選び、その記号を答えなさい。

考え方 $0 \leq x \leq 3$ のとき、 $y=\frac{1}{2} \times x \times 2x=x^2$ (放物線)

$3 \leq x \leq 6$ のとき、 $y=\frac{1}{2} \times x \times 6=3x$ (右上がりの直線)

$6 \leq x \leq 8$ のとき、 $y=\frac{1}{2} \times (6 \times 4 - x - 2x) \times 6$
 $=-9x+72$ (右下がりの直線)



ウ

- (4) $y=6$ となるときの x の値を全て求めなさい。

考え方 $0 \leq x \leq 3$ のとき、 $x^2=6$ $x>0$ より $x=\sqrt{6}$

$3 \leq x \leq 6$ のとき、 $y=6$ にはならない。

$6 \leq x \leq 8$ のとき、 $-9x+72=6$ より $x=\frac{22}{3}$

$x=\sqrt{6}, \frac{22}{3}$

実力テスト
発展

4章 関数 $y=ax^2$
③ まとめの問題



得点
点

- 1 2つの関数 $y=x^2$ と $y=ax+b$ について、 x の変域を $-2 \leq x \leq 3$ とすると、それぞれの y の変域は同じになります。このとき、 a 、 b の値を求めなさい。ただし、 $a > 0$ とします。〈江戸川女子高〉 [20点]

考え方 x の変域が $-2 \leq x \leq 3$ のとき、 $y=x^2$ の y の変域は $0 \leq y \leq 9$

これが $y=ax+b$ の y の変域と同じになるので、 $x=3$ のとき $y=9$ より $3a+b=9$ …①

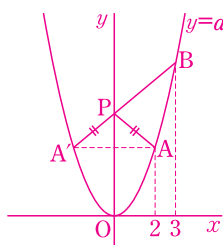
$x=-2$ のとき $y=0$ より、 $-2a+b=0$ …②

①、②の連立方程式を解く。

$$a = \frac{9}{5} \quad b = \frac{18}{5}$$

- 2 a は正の定数とし、関数 $y=ax^2$ のグラフ上に2点A、Bをとります。点A、Bの x 座標はそれぞれ2、3とします。また、点Pは y 軸上の点です。AP+BPの長さが最短になる点Pの y 座標が5であるとき、 a の値を求めなさい。〈拓殖大第一高〉 [20点]

考え方



$A(2, 4a)$ 、 $B(3, 9a)$ Aと y 軸について対称な点を A' 、 A' とBを結んだ線分と y 軸との交点をPとすると、 $A'B$ の長さがAP+BPの最短の長さを表す。

$A'(-2, 4a)$ より直線 $A'B$ の傾きは $\frac{9a-4a}{3-(-2)}=a$

点Pの y 座標は5だから、直線 $A'B$ の式は $y=ax+5$

点 $(3, 9a)$ を通るから $9a=3a+5$ より $a=\frac{5}{6}$

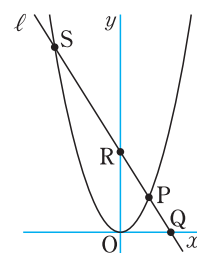
$$a = \frac{5}{6}$$

- 3 右の図のように放物線 $y=\frac{3}{4}x^2$ と、この放物線上の点Pを通り傾きが -2 の直線 ℓ があります。直線 ℓ と x 軸、 y 軸との交点をそれぞれQ、Rとします。ただし、点Pの x 座標は正とします。〈大阪桐蔭高〉 [20点×3=60点]

(1) 点Pの x 座標を2とします。

(ア) 直線 ℓ の式を求めなさい。

考え方 直線 ℓ は、傾きが -2 で $P(2, 3)$ を通る。



$$\star \frac{3}{4}x^2 = -2x + 7 \quad 3x^2 + 8x - 28 = 0 \quad x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \times 3 \times (-28)}}{2 \times 3} = \frac{-8 \pm 20}{6}$$

$$y = -2x + 7$$

(イ) 直線 ℓ と放物線 $y=\frac{3}{4}x^2$ との交点のうちP以外のものをSとします。このとき、 $\triangle OPS$ の面積を求めなさい。

考え方 $y=\frac{3}{4}x^2$ と $y=-2x+7$ を連立方程式として解くと、 $x=2$ 、 $-\frac{14}{3}$ (途中式は上の★を参照)

$x=2$ は点Pの x 座標だから、点Sの x 座標は $-\frac{14}{3}$

$$\triangle OPS = \triangle OPR + \triangle OSR = \frac{1}{2} \times 7 \times 2 + \frac{1}{2} \times 7 \times \frac{14}{3} = \frac{70}{3}$$

$$\frac{70}{3}$$

(2) $PQ:PR=1:2$ であるとき、点Rの座標を求めなさい。

考え方 $PQ:PR=1:2$ より、Pの x 座標を $2p$ ($p>0$) とすると、Qの x 座標は $3p$ だから、 $P(2p, 3p^2)$ 、 $Q(3p, 0)$

PQの傾きは $(0-3p^2) \div (3p-2p) = -3p$ $-3p = -2$ より $p = \frac{2}{3}$

よって、 $Q(2, 0)$ 直線 ℓ の式を $y=-2x+b$ とおいて、

$x=2$ 、 $y=0$ を代入すると、 $0=-4+b$ $b=4$

$$R(0, 4)$$